TEORIE SLOŽITOSTI V HYDROLÓGII

Karel Nacházel

Složitost jako důležitá charakteristika řešení mnoha vědeckých a odborných problémů, projektů, modelů a predikcí. Hlavní zdroje složitosti řešení úloh. Historický vývoj a vznik teorie složitosti, její vazby na systémové a další teorie. Vznik matematiky složitosti jako nástroje pro řešení složitých úloh. Hlavní problémové oblasti matematiky složitosti. Význam složitosti pro zkoumání zákonitostí přírodních jevů a rozvíjení moderní hydrologie. Problematika chování dynamických systémů v přírodě, nelinearity, samoorganizace s přechodem do nových struktur a nových oblastí chování systémů, neurčitost systémů. Objasnění principů topologie, deterministického chaosu a fraktální geometrie jako významných problémových oblastí matematiky složitosti. Možnosti propojení klasické topologie s teorií fuzzy množin a s teorií dynamických systémů. Využití v dynamické meteorologii, v hydrologii, odhady extrémních fází odtoku.

Klíčová slova: teorie složitosti, matematika složitosti, neurčitost, chování dynamických systémů, nelinearita, samoorganizace, topologie, deterministický chaos, fraktální geometrie

***Complexity theory in hydrology**. The paper deals with the complexity as an important characteristics of the solution of many scientific and special problems, projects, models and predictions. This study presents the main complexity sources of the solution of different tasks. The study analysis historical development and origin of the complexity theory, its relation to the system theory and others. It is possible to regard complexity mathematics as instrumental for the solution of complicated tasks. The main fields of complexity mathematics are discussed in this paper. The meaning of the complexity theory lies in the investigation of natural phenomena regularity and in the modern hydrology development. The study presents problems of dynamic systems behaviour in nature, non-linearity, self-organization with change-over to the new structure and to the new area of systems behaviour and also systems uncertainty. The paper also mentions the principles of topology, deterministic chaos and fractal geometry as important fields of the complexity theory. The theory has numerous application in meteorology and hydrology.*

Key words: Complexity theory, Complexity mathematics, Uncertainty, Dynamic systems behaviour, Non-linearity, Self-organization, Topology, Deterministic chaos, Fractal geometry.

---

1. Úvod

Složitost nám často dělá starosti v běžném životě při zvládání různých úkolů, povinností nebo situací. V odborném a vědeckém světě prostupuje řešením mnoha problémů, projektů, modelů, predikcí a dalších výzkumných úkolů. Složitost lze proto považovat za důležitou charakteristiku řešení. Nepodaří-li se nám ji v dané chvíli zvládnout, musíme zvolit postup jednodušší, méně nákladný, rychlejší, avšak za cenu výsledku pouze přibližného, méně obecného, daného předpoklady řešení. To současně vyvolává potřebu dalšího výzkumu. Obtíže mohou vzniknout též tím, že složitost zpravidla nevystupuje jako jediná charakteristika, ale spojuje se s dalšími charakteristikami, např. s důvěryhodností, neurčitostí řešení a j. Pak vzniká principiální otázka, jaké řešení bude optimální. V naší nedávné studii jsme ukázali význam zkoumání vzájemných vztahů mezi těmito charakteristikami (Nacházel, 2003 a,b).

Význam řešení složitých úloh a jejich vývoj lze dobře ukázat na příkladu hydrologie. V její historii lze zaznamenat řadu vývojových etap s rozvíjením nových metodických postupů, které přispívaly k řešení aktuálních vodohospodářských úkolů. V poslední době se ve světě i u nás věnovala velká pozornost odhadu charakteristik extrémních povodní a dalších katastrofických jevů. Výzkum tu přinesl nejen nové výsledky, ale i cenné podněty k řešení složitých a dosud nedostatečně prozkoumaných otázek. Patří k nim např. nestacionární tendence ve výskytu extrémních fází odtokového procesu, jeho ovlivnění klimatickou změnou a dalšími antropogenními faktory, problematika operativního řízení vodních děl v podmínkách neurčitosti a d. (Hladný, Nacházel, 2001).

Složitost je dána především charakterem dané úlohy, požadovaným cílem jejího řešení, kvalitou a rozsahem vstupních podkladů, úrovní rozpracovanosti metodických postupů potřebných právě pro řešení dané úlohy a výpočetní náročností. Všechny tyto charakteristické znaky se mohou v jednotlivých úlohách a disciplínách lišit. Přesto se tu vynořuje otázka, zda některé problémové oblasti nemají společný teoretický základ, na kterém by bylo možno rozvíjet aplikace. Podstatná je tu též otázka adekvátního matematického aparátu pro řešení těchto problémů.

V tomto příspěvku si klademe jen skromný cíl. Nejdříve shrneme krátce, ale v širších souvislostech vývoj tzv. teorie složitosti , která zatím do našeho vodního hospodářství pronikla jen ve velmi omezené míře. Pak naznačíme možnosti jejího využití pro řešení některých složitých úloh v hydrologii. Cílem příspěvku je tedy dát podnět k dalšímu vodohospodářskému výzkumu v této oblasti.

2. Vznik a dosavadní vývoj teorie složitosti

V přírodních vědách složitost vždy souvisela především s podstatou přírodních jevů, chápáním a objasňováním jejich geneze, s pronikáním matematických metod do jejich popisu, holistickými a systémovými koncepcemi. Literatura tu odhaluje dávný vývoj od newtonovské mechaniky, která vytvářela deterministický, kauzální a lineární obraz světa bez možnosti řešit složitost velkých oblastí přírody (Isaac Newton, 1642-1727) přes mechanistické postupy rozvíjené hlavně Pierrem-Simonem Laplaceem (1749–1827) až po současný matematický popis dynamických systémů včetně vzájemných vazeb mezi jejich prvky (Capra, 2004), (Prigogine, Stengersová, 2001), (Coveney, Highfield, 2003).

Vývoj řešení složitých problémů byl významně ovlivněn objevem teorie tepla a zákonů termodynamiky na počátku 19. století. Zrod teorie složitosti se často dává do souvislosti právě s těmito výzkumy.V roce 1811 získal Jean-Joseph Fourier cenu Francouzské akademie věd za matematický popis šíření tepla v pevných látkách. Poté v roce 1824 poprvé formuloval francouzský fyzik Sadi Carnot druhý zákon termodynamiky pro technologii tepelných strojů. Podle tohoto zákona se v každém uzavřeném systému zvětšuje entropie, systém proto směřuje k větší neuspořádanosti (Prigogine, Stengersová, 2001), (Capra, 2004).

Další vývoj teorie složitosti však nebyl jednoduchý a přímočarý. Teprve výzkumy na konci 19. století (Bruns, Poincaré) začaly ukazovat, že nelze vystačit s dřívějšími mechanistickými představami o přírodě a že dynamický svět není homogenní a redukovatelný na integrovatelné soustavy[1], ale chová se jako soubory vzájemně se ovlivňujících bodů (objektů). Objevné tu byly především práce francouzského matematika a fyzika Henri Poincarého (1854-1912), který studoval složité vlastnosti topologických útvarů a jejich transformaci při zachování některých vlastností, tedy invariantní struktury. Poincaré patrně jako první zahlédl stopy chaosu, který se ovšem začal systematicky zkoumat až v 60. letech minulého století (Capra, 2004).

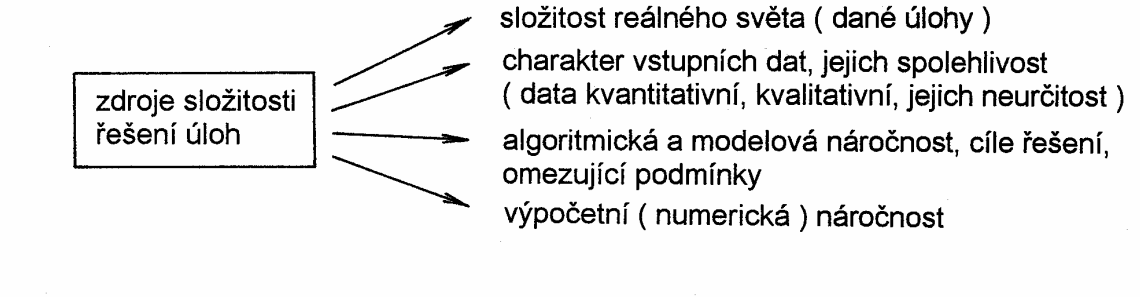
K rozvoji řešení složitých úloh významně přispěly též systémové teorie a koncepce. K novým poznatkům dospěl ve 40. letech 20. století rakousko-americký biolog Ludwig von Bertalanffy, který poukázal na to, že klasická termodynamika se zabývá uzavřenými rovnovážnými systémy nebo systémy blízkými rovnováze a není vhodná pro popis otevřených systémů, kde entropie (a tedy neuspořádanost) může klesat a druhý zákon termodynamiky zde nemusí platit. Bertalanffy však neměl v té době pro takové rozšíření termodynamiky otevřených systémů vhodný matematický aparát. Nová formulace termodynamiky tak musela čekat až do 70. let, kdy se podařilo nositeli Nobelovy ceny Ilyovi Prigoginovi přehodnotit dosavadní vědecké názory na řád a uspořádanost systémů pomocí nové matematiky a rozpracovat teorii disipativních struktur s nelinearitami a nestabilitami. Zde lze tedy

[1] Integrovatelné soustavy, rozvinuté Pierrem-Simonem Laplaceem, vycházely ze zjednodušené představy dynamického systému jako souboru volných bodů (objektů), jejichž chování bylo navzájem nezávislé. Deterministický vývoj každého bodu v dynamickém systému byl určen trajektorií pro dané počáteční podmínky, které však ve skutečnosti předem neznáme. Vývoj bylo možno podle toho odvozovat směrem do budoucnosti i minulosti (Prigogine, Stengersová, 2001), viz též poznámka ve studii (Nacházel, 2005).

spatřovat počátek novodobé etapy rozvoje teorie složitosti (v angl. literatuře complexity) a též matematiky složitosti.

K tomu jen krátce poznamenejme, že nové systémové přístupy, rozvíjené v první polovině 20. století, nevyústily hned ve formální matematickou teorii, kterou by bylo možno snadno aplikovat na řešení složitých systémů s mnoha vazbami mezi jejich prvky. Přispěly však ke vzniku nového způsobu myšlení, nového jazyka, nových koncepcí. Z tohoto klimatu se pak začínají od 70. let vynořovat systémové modely a vhodný matematický jazyk. Dlouholetý vývoj teorie složitosti tak postupně vedl ke zrodu matematiky složitosti jako nástroje pro řešení zejména složitých nelineárních úloh. Podstatný význam tu měl rozvoj výkonných počítačů, které umožňovaly řešit dříve nezvládnutelné úlohy.

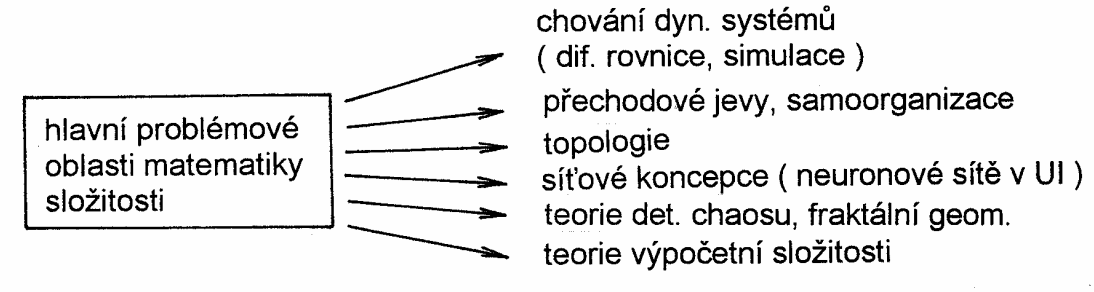
Hlavní zdroje složitosti řešení úloh jsme přehledně vyjádřili na obr.1. Skladba těchto zdrojů může být v jednotlivých úlohách různá, sledovat lze i vývoj jejich řešení. Hranice mezi zdroji složitosti nemusí být samozřejmě ostrá, zdroje složitosti se mohou překrývat.



Obr.1 Hlavní zdroje složitosti různých úloh.

Fig.1 The main complexity sources of different tasks.

Na obr.2 jsou uvedeny hlavní problémové oblasti matematiky složitosti. Připojíme k nim jen několik poznámek, které nám přiblíží jejich náplň. Nelineární diferenciální rovnice pokrývají široký rozsah různých typů chování dynamických systémů, lze tu modelovat mnohonásobně propojené zpětnovazební smyčky. Prigogine rozsáhle studoval strukturálně nestabilní systémy, kritické body nestability (nazývané „bifurkační body“) a přechod do nových struktur a nových oblastí chování systémů. Tuto schopnost otevřeného systému lze chápat jako jeho samoorganizaci, pro kterou je charakteristické nelineární propojení prvků systému. Výzkumy však ukázaly, že i některé lineární diferenciální rovnice mohou uspokojivě simulovat složité chování systémů. Někteří autoři usuzují, že klíčovou charakteristikou přírodních jevů je rozpoznání jejich neurčitosti, která může zvětšit složitost jejich řešení (Prigogine, Stengersová, 2001), (Capra, 2004).



Obr.2 Hlavní problémové oblasti matematiky složitosti.

Fig.2 The main problem areas of complexity mathematics.

Použití diferenciálních rovnic pro popis chování některých dynamických systémů však nemusí být vždy vhodné. Např. pro řešení vodohospodářských soustav jsou zpravidla vhodnější diskrétní simulační modely, které lze snáze odvodit pro obvyklé diskrétní vstupy a diskrétní krok řízení. Usnadňují též optimalizaci řešení na počítači podle různých kritérií a adaptaci na měnící se podmínky. Z toho lze odvodit, že při formalizaci je třeba vycházet z charakteru daného systému, jeho vstupů a cílů řešení.

Představa systému ve tvaru sítě prvků (objektů), které si navzájem předávají a transformují informaci, vznikla poprvé ve 20. letech 20. století, kdy ekologové začali studovat potravní řetězce. V polovině minulého století pak kybernetika usilovala o pochopení funkce mozku jako nervové sítě a hledala matematické prostředky pro její zjednodušenou simulaci. Za první se tu považuje práce W. McCullocha a W.Pittse z roku 1943, kteří odvodili jednoduchý model neuronu. V 80. letech se pak tyto nové přístupy rozvinuly do poměrně rozsáhlé teorie matematických modelů umělých neuronových sítí, která se dnes stala jedním vývojovým směrem umělé inteligence s nadějnými aplikacemi v mnoha oborech a též v hydrologii a ve vodním hospodářství. Za základní vlastnost sítí lze považovat nelinearitu mezi vstupy a výstupy. Tu však umělá síť zvládá na rozdíl od tradičních metodických přístupů (např. teorie regresních modelů) velmi efektivně a lze ji proto využít pro řešení složitých vztahů mezi proměnnými (např. pro řešení srážkoodtokových vztahů).

Topologie je matematickou disciplínou, která se zabývá takovými vlastnostmi složitých geometrických útvarů, které se při transformaci nemění. K důležitým úlohám tu patří transformace (zobrazení) jednoho topologického prostoru do druhého za podmínek homomorfizmu. Tyto metodické přístupy lákají především k hlubšímu studiu vzniku a vývoje extrémních jevů v hydrologii a meteorologii. Nebyly tu však zatím rozpracovány ani ověřeny. Na výzkum tak čeká aktuální, ale náročné téma. Vrátíme se k němu ještě v dalším odstavci.

Na obr.1 jsme přiřadili k hlavním zdrojům složitosti i výpočetní (numerickou) náročnost a na obr.2 adekvátní teorii výpočetní složitosti. Tato teorie porovnává složitost algoritmů podle doby, potřebné k nalezení řešení, a podle velikosti použité paměti. Algoritmus je pak v této teorii tím lepší, čím potřebuje kratší dobu k řešení a čím menší paměť počítače zabere. Čas, potřebný k vyřešení dané úlohy s určitým počtem parametrů, se aproximuje nějakou funkcí (zpravidla polynomiální), závisející na počtu těchto parametrů. Podle toho se pak rozlišují různé třídy úloh, popř. i úlohy neřešitelné v rozumném čase. Teorii výpočetní složitosti lze využít např. při řešení rozhodovacích a optimalizačních úloh vycházejících ze souborů mnoha variant, ze kterých se hledá řešení nejlepší podle požadovaného kritéria. Posuzování výpočetní složitosti je důležité i v některých vývojových směrech umělé inteligence (Mařík, Štěpánková, Lažanský, 2001).

Přes rozvoj teorie složitosti a jejího matematického aparátu se mnohé složité problémy v technických a ekonomických disciplínách dosud řeší nezávisle na jejích metodách. K rychlejšímu rozvoji tu může přispět těsnější spolupráce mezi základním a aplikovaným výzkumem, vzájemné ovlivňování a vyhledávání společných metodických postupů i v nepříbuzných vědních oborech a směřující k řešení speciálních problémů.

3. Metody řešení vybraných složitých úloh

Z širokého okruhu složitých úloh jsme vybrali jen problémovou oblast deterministického chaosu a problémovou oblast topologie, které mají pro aplikace v hydrologii a vodním hospodářství perspektivní význam. V omezeném příspěvku nelze vyčerpávajícím způsobem popsat metodické postupy, které jsou v obou případech dosti obsáhlé. Omezili jsme se proto na základní principy a zájemce o tyto vývojové směry odkazujeme na speciální literaturu.

3.1 Teorie deterministického chaosu, fraktální geometrie

Pro popis náhodných veličin v různých přírodních, technických a ekonomických systémech se zprvu využívaly jen metody teorie pravděpodobnosti a teorie náhodných procesů. Jejich statistické charakteristiky se odvozují na podkladě pozorovaných hodnot v minulosti. Avšak hodnoty samotných veličin v nejbližší budoucnosti nelze stanovit přesně, nejvýše je lze odhadnout za jistých předpokladů. Řešení úloh, ve kterých se tyto veličiny vyskytují, je proto zatíženo neurčitostí.

Uvedené metody mají důležité místo v mnoha vědních disciplínách, kde stochastické modely jsou základním podkladem pro řešení daného problému. Připomeneme si tu jen systémové teorie, zejména teorii řízení, která se m.j. zabývá problematikou řízení systémů ovlivněných působením poruchových veličin. Hlavním cílem regulace je pak zmenšit, popř. vyrovnat vliv těchto veličin na regulované veličiny.

Rychlý rozvoj teorie složitých systémů v posledních asi 30 letech přinesl řadu nových výsledků a poznatků. Např. se ukázalo, že podstatný význam má nelinearita deterministických modelů, která může plodit neuspořádaný a nepředvídatelný stav v následujícím okamžiku. Systém je sice popsán deterministicky, ale v čase se chová chaoticky. Představa tohoto nového typu chování některých systémů byla tehdy velice překvapivá, podobně jako opačný případ dynamiky, kdy v nahodilém chování systému může za jistých okolností vzniknout jeho nové uspořádání, nový řád.

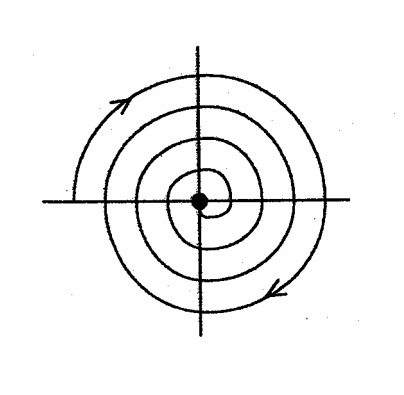
Jinou zajímavou vlastností složité dynamiky byla značná, někdy až extrémní citlivost systému i na malé změny počátečních podmínek. Z toho byl odvozen poznatek, že dlouhodobá predikce u takových systémů je nereálná. Týž problém vzniká u nepřesných počátečních dat, kde se ztrácí praktický smysl predikce vzhledem k jejich nejistotě. Pro tyto složité jevy v dynamice některých systémů se začal užívat poněkud neobvyklý, ale dnes už ve světě zcela běžný termín deterministický chaos. K tradičnímu členění systémů na deterministické a stochastické tak lze dnes přiřadit třetí skupinu – systémy s chaotickým chováním[2].
Deterministický chaos původně popsal americký meteorolog Edward Lorenz (1963), když chtěl vyjádřit chaotickou dynamiku konvektivního proudění v atmosféře. Tím dal podnět k prudkému rozvoji teorie chaosu, který změnil v některých směrech náš pohled na svět a chápání různých jevů. Především se ukázalo, že chování jednoduchých systémů může být velmi složité a naopak velmi složité systémy lze mnohdy popsat jednoduchými modely. Dalším poznatkem bylo zjištění, že chaotické chování může nastat u každé soustavy s nelinearitami. Avšak ne každý nelineární systém musí vést k chaotickému chování.

Výzkum chaotického chování některých systémů odhalil i pozoruhodné geometrické vlastnosti trajektorií ve fázovém prostoru. Fázovým (někdy nazývaným též stavovým) prostorem se rozumí abstraktní prostor, který vznikne projekcí všech relevantních proměnných na systém ortogonálních os. Každé proměnné tak odpovídá jedna osa (fázový prostor může mít proto teoreticky nekonečně mnoho dimenzí). Vývoj systému v čase (jeho dynamiku) lze pak popsat posloupností bodů ve fázovém

[2] Historický vývoj chápání a výkladu chaotických jevů lze sledovat už od starých primitivních národů. Starověké národy se snažily vysvětlit základní otázky vzniku světa, podstatu prostoru, času nebo vesmírných jevů prostřednictvím mýtů, legend a náboženství a vnést do nich určitý řád. Bohatá mytologie staré Číny, Indie, Persie a jiných zemí (dochovaná však mnohdy jen ve fragmentech původních písemností, v tzv. zlomcích) ukazuje, že chaos se tehdy chápal široce podle povahy diskutované otázky a mohl zahrnovat různé neznámé, neurčité, neuspořádané, nepředvídatelné či nevysvětlené jevy. Tak tu vystupuje např. pustý a prázdný postor, v němž nebylo možno nic určitého rozeznat, prostor oddělující nebe a zemi, stvoření světa vejcem, které bylo obklopeno temným chaosem a j. Nám bližší předsokratovská filozofie, považovaná za nejranější období řecké filozofie (období zhruba od poloviny 6. stol. až 4. stol. př.n.l.), usilovala o výklad světa přírody. Původní řecký termín „chásma“ byl spojen s představou velké větrné propasti (temnoty), ve které jsou prameny a hranice všech věcí. Tyto představy se staly zřejmě pozdější specifikací termínu „cháos“, který pak přijímal další významy (např. voda jako jedna ze základních pralátek nebo vše, co nemělo určitý tvar a d.). (Kirk, Raven, Schofield, 2004), (Stőrig, 1991), (Cave, 1994).

prostoru, nazývanou trajektorií. V teorii dynamických systémů se dokazuje, že trajektorie mohou konvergovat k charakteristickým geometrickým útvarům, které se nazývají atraktory. Atraktory mohou být velmi jednoduché (např. bod u kyvadla tlumeného třením nebo nějaká křivka a j.), které nejsou závislé na počátečních podmínkách. Existují však systémy s velmi složitou strukturou atraktorů, připomínající podivuhodné orientální obrazce. V těchto případech se hovoří o podivných (chaotických) atraktorech. Atraktory mohou mít kromě citlivosti na volbu počátečních podmínek i fraktální strukturu. Vrátíme se k ní ještě v dalším textu.

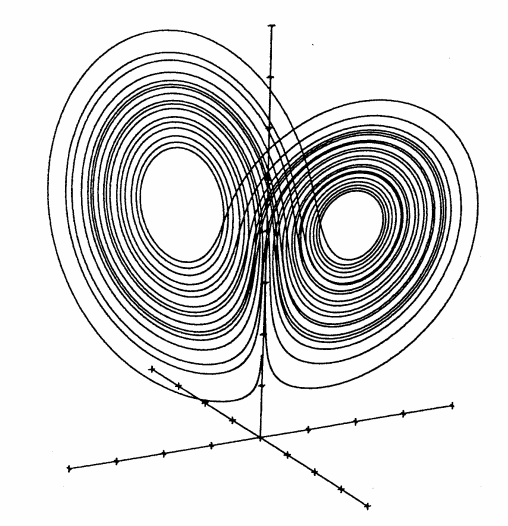
Na obr.3 je jednoduchý příklad atraktoru kyvadla, které rovnoměrně ztrácí energii třením. Všechny trajektorie se spirálovitě zavíjejí dovnitř k bodu, který představuje ustálený stav (bez pohybu). Na dvě osy se vynášejí úhel a rychlost kyvadla.



Obr.3 Atraktor kyvadla.

Fig.3 Attractor of the pendulum.

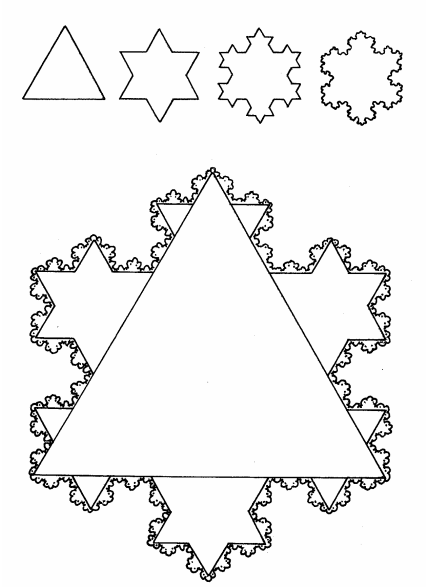
Na obr. 4 je znázorněn složitější Lorenzův atraktor ve tvaru dvojité spirály, která má tři rozměry.



Obr.4 Lorenzův atraktor.

Fig.4 Lorenz´s attractor.

Na obr. 5 je příklad fraktálové struktury, kterou odvodil jako první v roce 1904 švédský matematik Helge van Koch. Křivka se zkonstruuje tak, že vyjdeme z trojúhelníka o stranách délky 1. Doprostřed každé strany přidáme další trojúhelník třetinové velikosti a postup stále opakujeme. Délka křivky se tak stále zvětšuje do nekonečně (3 x 4/3 x 4/3 ...), ohraničuje však plochu s konečným obsahem, tj. kruhu opsaného původnímu trojúhelníku (Gleick, 1996).



Obr.5 Fraktálová struktura (Kochova křivka).

Fig.5 The structure of the fractals (the curve described by Helge van Koch).

Nereálnost dlouhodobých predikcí u chaotického chování, kterou jsme již zmínili, vedla k orientaci vývoje na krátkodobé predikční modely, vycházející z experimentálních dat o chování systému v čase (Drahoš, Punčochář, 2002).

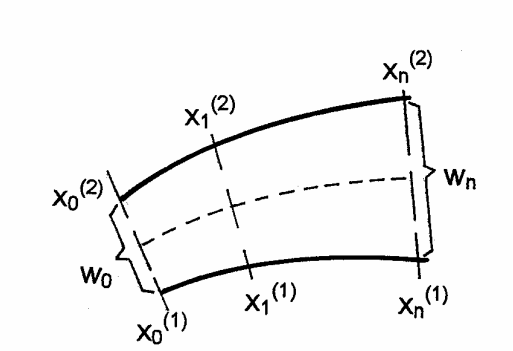
V souvislosti s chaotickým chováním systémů a složitými vlastnostmi jejich atraktorů se studuje další zajímavá otázka, a to fraktální struktura přírodních objektů (útvarů). Počátek těchto výzkumů se zpravidla klade na začátek 80. let min. století, kdy Benoit Mandelbrot ukázal na složitost a členitost některých přírodních objektů, které vykazují značnou vzájemnou podobnost při jejich geometrickém zobrazení v různém měřítku. Tak se zrodil nový pojem „soběpodobnost“ (self-similarity), který vyjadřuje při jisté idealizaci podobnost jednotlivých částí studovaného objektu a celku. Jako příklady lze uvést zobrazení členitého pobřeží úsečkami v různém měřítku, podobnost struktury větví a celého stromu, elementární soběpodobnost lze demonstrovat na jednoduchém členění úseček, čtverců nebo jiných geometrických útvarů. Samotný pojem fraktál (z lat. fractus, odvozeného od slovesa frangere – zlomit) tedy vyjadřuje členění složitého útvaru na dílčí části (zlomky) s jistou podobností.
Řešení fraktální struktury nemusí být ovšem jednoduchou úlohou. Lze ukázat, že tu někdy nepostačuje aparát klasické euklidovské geometrie, ale je třeba aplikovat složitější topologické přístupy k transformaci útvarů v prostoru, kterými se zabývá neeuklidovská geometrie (Hlavatý, 1949).

Důležitou úlohou v teorii deterministického chaosu je identifikace struktury časových chronologických řad pozorovaných veličin, která má odpovědět na otázku, nakolik je jejich chování chaotické nebo pouze náhodné a jakými matematickými prostředky ho lze popsat. Pro identifikaci se používají dva základní typy kvantifikátorů, popisujících jednak dynamiku chaotického chování, jednak geometrii atraktoru.

Podrobnější informaci o teorii deterministického chaosu a fraktální geometrii lze nalézt v řadě zahraničních i domácích prací. U nás jsou dostupné např. (Coveney, Highfield, 2003), (Drahoš, Punčochář, 2002), (Gleick, 1996), (Horák, Krlín, Raidl, 2003), (Miláček, 2003), (Štrunc, 2002a,b) a j.

Kvantifikátory chaosu

Dynamika chaotického chování se popisuje pomocí Ljapunovových koeficientů. Definují se jako logaritmus míry přibližování nebo vzdalování dvou sousedních trajektorií vývoje. Předpokládá se přitom, že trajektorie vycházejí z málo odlišných počátečních podmínek (obr.6).



Obr.6 Vzdálenost dvou sousedních trajektorií vývoje.

Fig.6 The distance of two neighbouring trajectories of the development.

Pro rostoucí body vývoje $n = 1, 2, ..., N$ lze sestavit posloupnost vzdáleností trajektorií $\{w_0, w_1, ..., w_N\}$. Ljapunovův exponent pro dvě sousední vzdálenosti je definován výrazem

$$\lambda = \frac{1}{n} \log_2 \frac{w_{n+1}}{w_n} \tag{1}$$

a pro všech N vzdáleností se pak tento exponent vyjadřuje střední hodnotou

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \log_2 \frac{w_{n+1}}{w_n} \tag{2}$$

Je zřejmé, že pro $\lambda<0$ ($w_{n+1}<w_n$) se obě trajektorie sbližují a vývoj je stabilní, naopak pro $\lambda>0$ se vzdalují.

Pro jednodimenzionální úlohu platí jednoduchý vztah $x_{n+1} = f(x_n)$.
Položíme-li $x_1 = x_0 + \varepsilon$, $w_0 = \varepsilon$, $w_1 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)$,

$$\text{dostaneme} \quad \frac{w_1}{w_0} = \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} = \frac{df}{dx}\Big|x_0 \tag{3}$$

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \log_2 \frac{df(x_0)}{dx} \tag{4}$$

Geometrická struktura trajektorií ve fázovém prostoru se posuzuje pomocí tzv. fraktální dimenze. Jde o exponent, který vyjadřuje vztah mezi počtem náhradních elementárních geometrických útvarů N a jejich rozměrem ε. Pro pokrytí křivky jednotkové délky potřebujeme např. $N\sim 1/\varepsilon$ úseček, pro pokrytí plochy pak $N\sim 1/\varepsilon^2$ čtverců, pro pokrytí třírozměrného prostoru $N\sim 1/\varepsilon^3$ krychlí atd. Obecně tedy můžeme tento vztah vyjádřit výrazem

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^d} \text{ , kde } \varepsilon^d \text{ znamená objem hyperkrychle,} \tag{5a}$$

$$\text{a odtud } \log N(\varepsilon) = d \,.\, \log \frac{1}{\varepsilon} \tag{5b}$$

$$\text{neboli } d = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \tag{6}$$

Číslu $d = d_k$ se říká kapacitní dimenze, které však nemusí být celé. Pak se hovoří o fraktální (zlomkové) dimenzi a o fraktální struktuře.

Kromě fraktální dimenze se často používá tzv. bodová (též lokální) dimenze. Její definice vychází z pravděpodobnosti výskytu dvojice bodů trajektorie systému v nějaké elementární oblasti kolem bodu ve fázovém prostoru. Tuto oblast zpravidla tvoří (obecně ve vícerozměrném prostoru) hyperkrychle se stranou ε nebo hyperkoule s poloměrem ε.
Jestliže jsou tedy dány ve fázovém prostoru body vývoje
$x_1 , x_2 , \ldots, x_N$, můžeme pro každý z nich nejdříve vypočítat rozdíl
$\Delta_{mn} = x_n - x_m$, $m = 1 , 2 , \ldots, M$, $M << N$, kde x_m je bod trajektorie ve vzdálenosti m, a poté pravděpodobnosti

$$P_n(\varepsilon) = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{M}(\| \Delta_{mn} \| < \varepsilon), \text{ kde v závorce je logická funkce s hodnotou 0 nebo 1.} \qquad (7)$$

Bodová dimenze se pak definuje výrazem

$$d_b = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log P_n(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \qquad (8)$$

Obdobně se definuje tzv. korelační dimenze. V tomto případě je třeba spočítat počet bodů uvnitř kružnice s poloměrem r.

$$d_k = \lim_{r\to 0}\frac{\log \sum_i p_i^2}{\log r} \qquad (9)$$

Limita $r \to 0$ požaduje co nejjemnější dělení fázového prostoru.

Zajímavé výsledky nelineární analýzy meteorologických řad uvádí naše literatura (Horák, Krlín,Raidl, 2003). Analýzu chaotické struktury srážkových řad lze nalézt v časopiseckém příspěvku (Sivakumar et al., 2001), ve kterém jsou obsáhlé odkazy na další zahraniční práce z oblasti hydrologie. Výklad náhodných a chaotických jevů v mechanice je uveden ve skriptu Miláčka (2003). Pro rozvíjení dalšího výzkumu jsou tu četné podněty a naznačeny otevřené otázky. Základním předpokladem zkoumání chaotické struktury chronologických hydrologických řad je uspokojivá spolehlivost dat, velmi krátký krok (hodiny, den) a větší délka řady. Tento požadavek může v hydrologii bránit širším aplikacím, protože většina vodohospodářských úloh se řeší na podkladě řad průměrných ročních nebo měsíčních průtoků, které poskytuje ČHMÚ v rámci standardních hydrologických údajů. Pro kratší krok mnohdy chybějí měřené či zpracované údaje. Řešení problematiky chaosu v hydrologii bude proto vyžadovat především přípravu dostupných a spolehlivých dat.

3.2 Topologie

Topologie jako odnož geometrie se začala rozvíjet během 19. století, svého rozkvětu se dočkala ve 20. století a zejména pak v 50. letech. Zkoumá vlastnosti geometrických útvarů, které se nemění deformací, otáčením nebo stlačováním, a to i ve vícerozměrných prostorech.

Ústředním pojmem je tu topologický prostor. Rozumí se jím dvojice $\langle X, t\rangle$, kde X je daná neprázdná množina prvků (bodů) a t je systém jejích podmnožin. Topologie studuje vlastnosti tohoto systému podmnožin, zobrazení jednoho topologického prostoru do druhého, invariantní vlastnosti prostorů, metrické prostory a další úlohy. Jde tedy o matematickou disciplínu, která zkoumá s využitím aparátu teorie množin vlastnosti složitých útvarů v prostoru, jejich vzájemné vztahy a zobrazení (transformace). K důležitým úlohám tu patří nalezení podmínek, za kterých lze např. dva prostory pokládat za homomorfní, tedy takové, které mají nějakou společnou topologickou vlastnost (tzv. invariant). Existuje-li homomorfismus mezi topologickými prostory, hovoří se o relaci ekvivalence na třídě těchto prostorů nebo krátce o topologicky ekvivalentních prostorech (Bureš, 1971).

Na první pohled je zřejmé, že pro zkoumání dynamiky hydrologických a meteorologických procesů se tu nabízí matematický aparát, který nepochybně umožňuje řešit dosti složité úlohy. Hydrologie i meteorologie pracují s velkými objemy dat, která popisují vývoj stochastických, nelineárních a dynamických procesů v prostoru a čase. Cílem řešení je tu zejména odhad odtokové odezvy a jejího extrému. Základním problémem je tu synergický efekt při sdružování několika příčinných faktorů, které se vyvíjejí v čase (Nacházel,2005).

Je pozoruhodné, že záhy po objevu teorie fuzzy množin (Zadeh, 1965) se začaly vynořovat práce propojující ji s topologií (Chang, 1968), (Michálek, 1975). Tak vznikla fuzzy topologie, která zkoumá v topologickém prostoru systémy fuzzy podmnožin, jejich vlastnosti a transformace. Její výhodou je možnost studovat vlastnosti složitých útvarů v prostoru i v případě, kdy je nelze všechny kvantifikovat. Pokud budeme řešit dynamiku meteorologických charakteristik a vývoj synoptických situací, bude třeba si ujasnit míru podrobnosti vyjádření lingvistických proměnných množinou jejich lingvistických hodnot (tzv. termů), dále univerzum, na kterém jsou tyto hodnoty definovány, a způsob odvození jejich funkcí příslušnosti. Nezbytný tu bude výzkum, protože s fuzzifikací v této oblasti máme zatím málo zkušeností.

Pro popis chování složitých systémů se tu ještě nabízí spojení topologie s teorií dynamických systémů. Topologické transformace útvarů ve fázovém prostoru mohou přispět k objasnění chaotických vlastností těchto systémů. I tyto možnosti bude třeba ověřit ve výzkumu.

Aplikace metodických postupů topologie ve vodním hospodářství není zatím příliš široká. V literatuře lze nalézt příklady topologického vyjádření složité struktury vodohospodářských soustav, popř. její zobrazení pomocí grafů. Topologie byla využita též v metodách umělé inteligence při hledání optimální struktury umělých neuronových sítí a řešení srážkoodtokových vztahů. Často se tu hovoří o topologii neuronových sítí a její automatické optimalizaci na počítači (Nacházel, Starý, Zezulák a kol., 2004).

4. Závěry

Složitost je důležitou charakteristikou mnoha úloh, která ovlivňuje kvalitu a spolehlivost výsledku jejich řešení, dobu a náklady na zpracování. Často vyvolává potřebu dalšího výzkumu. Složitost řešení závisí především na charakteru problému, požadovaném cíli řešení, kvalitě a rozsahu vstupních podkladů, stavu poznání dané problematiky, rozpracovanosti metodických postupů a výpočetní náročnosti.

Potřeba rozvíjet metodické postupy řešení složitých úloh v rámci výzkumu vyplývá hlavně z jejich aktuálnosti a významu pro praxi. Při zjednodušeném řešení je třeba zvažovat jeho důsledky na kvalitu výsledku a další postup zpracování úkolu. Jde tu tedy o přípustnost takového řešení.

Teorie složitosti se v minulosti vyvíjela postupně v rámci různých vědních oblastí. Přitom se ukázalo, že v některých oborech lze využít společné nebo příbuzné matematické formalizmy, které přispívají k objasnění chování složitých jevů. K problémovým oblastem matematiky složitosti patří např. chování dynamických systémů, nestabilita systémů, chaotická dynamika, fraktálové struktury a d. Jejich aplikace lze nalézt v současné době ve fyzice, chemii, astronomii, meteorologii, ale též v medicíně (neurologii), biologii a v dalších oborech.

V hydrologii a vodním hospodářství řešíme řadu složitých úkolů, které nám dělají stále starosti a mají přitom značný praktický význam. Patří k nim např. predikce extrémních hydrologických situací na podkladě působení příčinných faktorů, operativní řízení vodních děl a jejich soustav v podmínkách neurčitosti, nehomogenita hydrologických dat a metodika jejich zpracování po roce 1980, plánování vodního hospodářství se zřetelem ke globálním nejistotám a d. Pro řešení těchto úkolů bude prospěšné

rozpracovat a ověřit ve výzkumu nové metody a usilovat o přípravu počítačových programů, umožňujících v praxi rutinní aplikaci.

Studie byla zpracována za podpory grantového projektu GAČR reg.č. 103/04/0352 „Teorie operativního řízení vodohospodářských soustav za povodňových situací“.

Literatura

Bureš,J. (1971): Úvod do topologie. Fakulta mat. fyz. UK v Praze. SPN, Praha, 106 s.

Capra,F.(2004): Tkáň života. Nová syntéza mysli a hmoty. Překlad z angl. orig. The Web of Life. A New Synthesis of Mind and Matter. Nakl. ACADEMIA, Praha, 296 s.

Coveney,P., Highfield,E. (2003): Mezi chaosem a řádem. Hranice komplexity: hledání řádu v chaotickém světě. Překlad z angl.orig. Frontiers of Complexity. Mladá fronta, Praha, 432 s.

Drahoš,J., Punčochář,M. (2002): Fraktály a chaos: další z vědeckých revolucí 20. století? In: Sborník Myšlenky na zlomu tisíciletí. Nakl. VUTIUM, Brno, s. 255-277.

Gleick,J. (1996): Chaos: Vznik nové vědy. Překlad z angl.orig. Chaos: Making a New Science. Ando Publishing, Brno, 352 s.

Hladný,J., Nacházel,K. (2001): Historický vývoj, výsledky a perspektivy odhadu charakteristik povodňových vln. In: Sborník Vývoj metod pro odhad extrémních povodní. ČVTVHS, ČNVH, ČHMÚ Praha, s. 7-23.

Hlavatý,V. (1949): Úvod do neeuklidovské geometrie. JČMF, Praha, 228 s.

Horák,J., Krlín,L., Raidl,A. (2003): Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace. Nakl. ACADEMIA, Praha, 440 s.

Chang,C.L. (1968): Fuzzy Topological Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 24, s. 182-190.

Kirk,G.S., Raven,J.E., Schofield,M. (2004): Předsókratovští filosofové. Kritické dějiny s vybranými texty. Překlad z angl.orig. The Presocratic Philosophers, nakl. Cambridge University Press, 1983. Nakl. OIKOYMENH, Praha, 664 s.

Mařík,V., Štěpánková,O., Lažanský,J. a kol. (2001): Umělá inteligence (3). Nakl. ACADEMIA, Praha, 328 s.

Michálek,J. (1975): Fuzzy Topologies. Kybernetika, 11, s. 345-354.

Miláček,S. (2003): Náhodné a chaotické jevy v mechanice. Vydav. ČVUT, Praha, 141 s.

Nacházel,K. (2003a): Problematika vzájemných vztahů mezi složitostí, důvěryhodností a neurčitostí matematických modelů ve vodním hospodářství. Část 1: Formulace problematiky, motivace jejího zkoumání, metodologie. Vodohosp.Čas., roč. 51, č.2, s. 85-96.

Nacházel,K. (2003b): Problematika vzájemných vztahů mezi složitostí, důvěryhodností a neurčitostí matematických modelů ve vodním hospodářství. Část 2: Aplikace. Vodohosp.Čas., roč. 51, č.4, s. 274-280.

Nacházel,K. (2005): Můžeme v hydrologii sdružovat neurčité informace a znalosti? Vodohosp.Čas., roč. 53, č. 1, s.30-43.

Nacházel,K., Starý,M., Zezulák,J. a kol. (2004): Využití metod umělé inteligence ve vodním hospodářství. Nakl. ACADEMIA, Praha, 320 s.

Prigogine,I., Stengersová,I. (2001): Řád z chaosu. Nový dialog člověka s přírodou. Překlad z angl. orig. Order out of Chaos. Man´s New Dialogue with Nature. Mladá fronta, Praha, 320 s.

Sivakumar,B., Sorooshian,S., Gupta,H.V., Gao,X. (2001): A chaotic approach to rainfall disaggregation. Water Resources Research, Vol. 37, No. 1, s. 61-72.

Störig,H.J. (1991): Malé dějiny filozofie. Překlad z něm. orig. Kleine Weltgeschichte der Philosophie in zwei Bänden. Verlag W.Kohlhammer GMBH Stuttgart 1990. Nakl.Zvon, Praha, 512 s.

Štrunc,M. (2002a): Svět nelineárních jevů. In: Sborník Myšlenky na zlomu tisíciletí. Nakl. VUTIUM, Brno, s. 220-222.

Štrunc,M. (2002b): Udivující samoorganizace. In: Sborník Myšlenky na zlomu tisíciletí. Nakl. VUTIUM, Brno, s. 225-253.

Tajemství času a vesmíru (1994): Překlad z angl. orig. Janet Cave, Time and Space, Time-Life Books, Amsterdam 1989. Nakl. GEMINI, Praha, 144 s.

Zadeh,L.A. (1965): Fuzzy Sets. In: Information and Control, 8, s. 338-353.

Autor

Karel Nacházel, ČVUT – Fakulta stavební, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, milecova@fsv.cvut.cz